JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 8, 387–399 (1973)

Neue Existenz- und Konvergenzsätze in der Fixpunkttheorie nichtlinearer Operatoren

J. REINERMANN

Lehrstuhl C für Mathematik, Technische Hochschule Aachen, Aachen, Deutschland

Communicated by P. L. Butzer

HERRN PROF. DR. I. J. SCHOENBERG ZUM 70. GEBURTSTAG GEWIDMET

1. FIXPUNKTSÄTZE FÜR KOMPAKTE UND KONDENSIERENDE ABBILDUNGEN

In [22] wird mit Hilfe eines Fortsetzungsprinzips für stetige Funktionen versucht, Varianten der Fixpunktsätze von Brouwer [3], Browder [4], Göhde [11], Kirk [13], Reinermann [21], Sadovski [26], Schauder [28] mit Randvoraussetzungen dadurch zu erhalten, indem jeder Variante eine äquivalente, sich unter den oben aufgeführten Prototypen befindliche Fixpunktaussage zugeordnet wird. Das in [22] verwendete Verfahren (Retraktionsmethode) funktioniert aber allgemein nur, wenn–wie auch sonst in der Fixpunkttheorie üblich–die Definitionsbereiche der jeweils betrachteten Funktionen konvex angenommen werden. Im Gegensatz dazu werden wir im folgenden, unter Beibehaltung der in [22] praktizierten Methode, jedoch bei Verwendung des Fortsetzungssatzes für stetige Funktionen von Tietze–Dugundji [8], Fixpunktaussagen vom Rothe-Typ [22] für kompakte bzw. kondensierende Abbildungen auch bei nicht notwendig konvexen Definitionsbereichen ableiten.

LEMMA 1 (Fortsetzungssatz von Tietze–Dugundji [8]). *E metrisierbarer topologischer Raum, $\phi \neq A \subset E$ abgeschlossen, F lokalkonvexer Raum, $f\colon A \to F$ stetig. Es gibt $g\colon E \to F$ mit*

(i) $g \mid A = f$,

(ii) $g(E) \subset \operatorname{co} f(A)$.[1]

Beweis. [8].

[1] Für $\phi \neq B \subset F$ bezeichne co B die konvexe Hülle von B in F.

Copyright © 1973 by Academic Press, Inc.
All rights of reproduction in any form reserved.

Lemma 2 (Fortsetzungssatz). *E metrisierbarer topologischer Raum, $\phi \neq A \subset E$ abgeschlossen, F lokalkonvexer Raum, $\phi \neq K \subset F$, $Y \subset F$ konvex, K und Y homöomorph, $f\colon A \to K$ stetig. Es gibt $h\colon E \to K$ stetig mit $h \mid A = f$.*

Beweis. Sei $\alpha\colon K \to Y$ Homöomorphie. Dann ist $\alpha \circ f\colon A \to F$ stetig. Nach Lemma 1 gibt es $g\colon E \to F$ stetig mit $g \mid A = \alpha \circ f$ und $g(E) \subset \operatorname{co} \alpha \circ f(A) \subset \operatorname{co} \alpha(f(A)) \subset \operatorname{co} \alpha(K) \subset \operatorname{co} Y \subset Y$. Für $h := \alpha^{-1} \circ g$ ist dann $h\colon E \to K$ stetig und $h \mid A = (\alpha^{-1} \circ g) \mid A = \alpha^{-1} \circ (\alpha \circ f) = (\alpha^{-1} \circ \alpha) \circ f = f$.

Satz 1 (Fixpunktsatz für kompakte Abbildungen). *E Frechet-Raum,*[2] *$\phi \neq X \subset E$ abgeschlossen und beschränkt, $\phi \neq K \subset X$, $Y \subset E$ konvex und kompakt, K und Y homöomorph, $f\colon X \to E$ kompakt*[3] *mit $f(\mathrm{Rd}(X)) \subset K$.*[4] $\mathrm{Fix}(f) \neq \phi$.[5]

Beweis. Mit $Y := \overline{\operatorname{co}}(f(X) \cup X)$ ist Y abgeschlossen, beschränkt, und konvex. Wegen $\mathrm{Rd}(X) \neq \phi$ und $\mathrm{Rd}(X)$ abgeschlossen in $Y \setminus \mathring{X}$ und $f \mid \mathrm{Rd}(X)\colon \mathrm{Rd}(X) \to K$ stetig, gibt es nach Lemma 2 $h\colon Y \setminus \mathring{X} \to K$ stetig mit $g \mid \mathrm{Rd}(X) = f \mid \mathrm{Rd}(X)$. Definiert man $G\colon Y \to E$ vermöge

$$G(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in X \\ h(x), & \text{falls } x \in Y \setminus \mathring{X} \end{cases}, \qquad \text{so gilt:}$$

(i) G ist stetig,

(ii) $G(Y) \subset f(X) \cup h(Y \setminus \mathring{X}) \subset f(X) \cup K \subset f(X) \cup X \subset Y$,

(iii) Wegen $G(Y) \subset \overline{f(X)} \cup K$ ist G mit f nach (i) kompakt.

(iv) $\mathrm{Fix}(G) = \mathrm{Fix}(f)$.

Nach Schauder–Tychonoff [28], [32] ist $\mathrm{Fix}(G) \neq \phi$, also wegen (iv) auch $\mathrm{Fix}(f) \neq \phi$.

Bemerkung 1. (1) Ein Analogon zu Satz 1 für endlich-dimensionales E beweist Brown [6].

(2)(a) Als Spezialfall von Satz 1 ergibt sich Satz 2.

Satz 2 (Fixpunktsatz vom Rothe-Typ [22] für kompakte Abbildungen). *E Frechet-Raum, $\phi \neq X \subset E$ abgeschlossen und beschränkt, $f\colon X \to E$ kompakt mit* $\operatorname{co} f(\mathrm{Rd}(X)) \subset X$. $\mathrm{Fix}(f) \neq \phi$.

[2] d.h. E ist lokalkonvex, vollständig und metrisierbar.
[3] d.h. f ist stetig und $\overline{f(X)}$ ist kompakt.
[4] $\mathrm{Rd}(X) := \bar{X} / \mathring{X}$ ($\mathring{X}$:= Inneres von X).
[5] $\mathrm{Fix}(f) := \{x \mid x \in X \wedge f(x) = x\}$.

Beweis. Man setzt in Satz 1 $Y := \overline{\mathrm{co}}\, f(\mathrm{Rd}(X))$.

(2)(b) Für konvexes X ist "$\mathrm{co}\, f(\mathrm{Rd}(X)) \subset X$" mit "$f(\mathrm{Rd}(X)) \subset X$" äquivalent. Die in diesem Fall aus Satz 2 fließenden Aussagen sind bekannt [22].

(3) Ist in Satz 1 speciell $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}^n$ und X selbst homöomorph zur Einheitsvollkugel E^n um $0 \in \mathbb{R}^n$, kann $K := E^n$ gesetzt werden. Die sich so ergebenden Fixpunktaussagen lassen sich mit Hilfe des Satzes von der Gebietstreue (!) auf den Fall $X = E^n$ (Rothe [22]) zurückführen.

(4)(a) Daß in Satz 1 selbst die Voraussetzung "K kompakt und zusammenhängend" für den Fixpunktschluß nicht ausreicht, zeigt schon das Beispiel $E := \mathbb{R}^2$, $X := \{z \mid z \in \mathbb{R}^2, 1 \leq \|z\| \leq 2\}$, $f(z) := -z$ $(z = (x, y))$. Für $f(\mathrm{Rd}(X))$ gibt es dann kein K der in Satz 1 verlangten Art.

(4)(b) Das Beispiel unter (a) zeigt auch, daß es nicht genügt "$f(\mathrm{Rd}(X)) \subset X$" zu fordern.

(4)(c) Anhand einfacher Beispiele (Sterne) zeigt man überdies, daß "$f(\mathrm{Rd}(X)) \subset K \cdots$" weitreichender ist als "$\mathrm{co}\, f(\mathrm{Rd}(X)) \subset X$."

DEFINITION 1. Es sei $(E, \|\ \|)$ ein linearer normierter Raum. Für beschränktes $Y \subset E$ erklären wir $\Delta(Y) \in \mathbb{R}^+$ durch

$$\Delta(Y) := \inf\{\epsilon \mid \epsilon > 0, \text{ und es gibt endliche Überdeckung } \{D_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\} \text{ von } Y \text{ mit } \phi \neq D_i \subset E \text{ und } \mathrm{diam}(D_i) < \epsilon,\ i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

LEMMA 3 (Eigenschaften des Nichtkompaktheitsmaßes Δ). *$(E, \|\ \|)$ linearer normierter Raum; $A, B \subset E$, $x \in E$; A, B jeweils beschränkt, $Y \to \Delta(Y)$ wie unter Definition 1 erklärt.*

(i) $A \subset B \Rightarrow \Delta(A) \leq \Delta(B)$,

(ii) $\Delta(A \cup \{x\}) = \Delta(A)$,

(iii) $\Delta(\mathrm{co}\, A) = \Delta(A)$,

(iv) $\Delta(A \cup B) = \max\{\Delta(A), \Delta(B)\}$,

(v) $\Delta(\bar{A}) = \Delta(A)$,

(vi) $\Delta(A) = 0 \Leftrightarrow A$ *präkompakt.*

Beweis. [19] and [21].

DEFINITION 2. Es sei $(E, \|\ \|)$ ein linearer normierter Raum, $\phi \neq X \subset E$ beschränkt, $f: X \to E$ heißt "kondensierend": $\Leftrightarrow$

(i) f ist stetig,

(ii) $\bigwedge_B (B \subset X \wedge B$ nicht präkompakt$)) \Rightarrow \Delta(f(B)) < \Delta(B)$.

BEISPIELE (Generalvoraussetzungen wie unter Definition 2).

(1) f kondensierend $\wedge$ g kompakt $\Rightarrow$ $f+g$ kondensierend,

(2) f Banach-kontrahierend $\Rightarrow$ f kondensierend,

(3) f kompakt $\Rightarrow$ f kondensierend,

(4) f Banach-kontrahierend $\wedge$ g kompakt $\Rightarrow$ $f+g$ kondensierend (folgt aus (1)–(3)).

LEMMA 4 (Fixpunktsatz für kondensierende Abbildungen). *$(E, \|\ \|)$ Banach-Raum, $\phi \neq X \subset E$ abgeschlossen, beschränkt, konvex, $f: X \to X$ kondensierend.* $\operatorname{Fix}(f) \neq \phi$.

Beweis. [21].

SATZ 3 (Fixpunktsatz für kondensierende Abbildungen). *$(E, \|\ \|)$ Banach-Raum, $\phi \neq X \subset E$ abgeschlossen und beschränkt, $f: X \to E$ kondensierend mit*

(*) $\operatorname{co} f(\operatorname{Rd}(X)) \subset X$,

(**) $f(\operatorname{Rd}(X))$ *präkompakt.*

$\operatorname{Fix}(f) \neq \phi$.

Beweis. Sei K abgeschlossene Vollkugel um $0 \in E$ mit $f(X) \cup X \subset K$. Nach Lemma 1 gibt es $g: K \setminus \mathring{X} \to E$ stetig mit $g \mid \operatorname{Rd}(X) = f \mid \operatorname{Rd}(X)$ und $g(K \setminus \mathring{X}) \subset \operatorname{co} f(\operatorname{Rd}(X))$. Wir definieren $H: K \to K$ stetig vermöge

$$H(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in X \\ g(x), & \text{falls } x \in K \setminus \mathring{X} \end{cases}.$$

Sei $B \subset K$ nicht präkompakt. Dann ist mit

$$B = (X \cap B) \cup ((K \setminus X) \cap B)$$

und

$$H(B) = H(X \cap B) \cup H((K \setminus X) \cap B) = f(X \cap B) \cup g((K \setminus X) \cap B)$$

infolge Lemma 3 und Voraussetzung (**)

$$\begin{aligned} \Delta(H(B)) &= \max\{\Delta(f(X \cap B)), \Delta(g((K \setminus X) \cap B))\} \\ &\leqslant \max\{\Delta(f(X \cap B)), \Delta(\operatorname{co} f(\operatorname{Rd}(X)))\} \\ &\leqslant \max\{\Delta(f(X \cap B)), \Delta(f(\operatorname{Rd}(X)))\} \\ &\leqslant \Delta(f(X \cap B)). \end{aligned}$$

Ist $X \cap B$ präkompakt, so folgt daraus

$$\Delta(H(B)) \leqslant \Delta(f(X \cap B)) \leqslant \Delta(f(\overline{X \cap B})) = 0 < \Delta(B).$$

Ist $X \cap B$ nicht präkompakt, so folgt

$$\Delta(H(B)) \leqslant \Delta(f(X \cap B)) < \Delta(X \cap B) \leqslant \Delta(B).$$

Also ist H kondensierend. Wegen Lemma 3 und $\text{Fix}(H) = \text{Fix}(f)$ folgt die Behauptung.

2. Ein Fixpunktsatz für Halbgruppen von Isometrien

Brodskii und Milman haben in [2] u.a. gezeigt, daß die Gruppe $\mathscr{H}$ der surjektiven isometrischen Selbstabbildungen einer nichtleeren, abgeschlossenen, beschränkten, konvexen Teilmenge X eines gleichmäßig-konvexen Banach-Raumes einen Punkt fest läßt.[6] Wir zeigen in Satz 5, daß schon im Falle eines strikt konvexen, reflexiven Banach-Raumes unter der Halbgruppe aller isometrischen Selbstabbildungen einer nichtleeren, abgeschlossenen, beschränkten, konvexen Teilmenge ein Punkt fest bleibt.

DEFINITION 3. Es seien $(E, \|\ \|)$, $(F, \|\ \|)$ lineare normierte Räume; es sei $\phi \neq X \subset E$ konvex; $f\colon X \to F$ heißt "affine Isometrie:" $\Leftrightarrow$

(i) f ist Isometrie,[7]

(ii) Für $x, y \in X$ und $\lambda \in [0, 1]$ ist

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

LEMMA 5 (Struktursatz für Isometrien). *$(E, \|\ \|)$, $(F, \|\ \|)$ lineare normierte Räume, $(F, \|\ \|)$ striktkonvex, $\phi \neq X \subset E$ konvex, $f\colon X \to F$ Isometrie. f ist affine Isometrie.*

Beweis. [19], man vergleiche auch [9].

SATZ 4 (Satz vom Mazur–Ulam-Typ). *$(E, \|\ \|)$, $(F, \|\ \|)$ reelle lineare normierte Räume, $(F, \|\ \|)$ striktkonvex, $f\colon E \to F$ Isometrie, $f(0) = 0$. f ist linear.*

Beweis. Nach Lemma 5 ist f affine Isometrie auf E. Dann gibt es aber (genau) ein $A \in L(E, F)$ und (genau) ein $b \in F$ mit $f(x) = A(x) + b$ für $x \in E$ (es ist natürlich $A(x) = f(x) - f(0)$ und $b = f(0)$). Wegen $f(0) = 0$ ist $b = 0$, also f lineare Isometrie.

Bemerkung 2. (1) Für komplexe Räume ist Satz 4 falsch: Beispiel: $(E, \|\ \|) := (F, \|\ \|) := (\mathbb{C}$, Betrags-Norm$)$, $f(z) := \bar{z}$.

[6] d.h. es gibt $x \in X$ mit $f(x) = x$ für $f \in \mathscr{H}$.

[7] d.h. für $x, y \in X$ ist $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

(2) Satz 4 gilt für beliebige $(F, \|\ \|)$ nicht: Beispiel: Es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nichtlinear, nichtexpansiv[8] und $g(0) = 0$ (z.B. $g = \arctan$). Wir setzen $(E, \|\ \|) := (\mathbb{R}, \text{Betrags-Norm})$, $(F, \|\ \|) := (\mathbb{R}^2, \text{Max-Norm})$. Mit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definiert durch $f(x) := (x, g(x))$ ist dann f Isometrie und $f(0) = 0$, jedoch ist f nichtlinear.

(3) Satz 4 gilt für beliebige $(F, \|\ \|)$, wenn man zusätzlich "f surjektiv" verlangt, [15, 19, 23].[9]

Lemma 6 (Fortsetzungssatz für affine Isometrien). *$(E, \|\ \|)$ Banach-Raum, $X \subset E$ konvex, $0 \in X$, $f\colon X \to E$ affine Isometrie. Es gibt genau ein $g\colon \overline{\operatorname{span}}(X) \to \overline{\operatorname{span}}(X)$ mit*

(i) *g ist affine Isometrie,*

(ii) *$g \mid X = f$.*

Beweis. [9] and [19].

Lemma 7 (Fixpunktsatz von Ryll–Nardzewski [1, 25]). *$(E, \|\ \|)$ Banach-Raum, $\phi \neq X \subset E$ schwach kompakt und konvex, $\mathscr{H} \subset X^X$[10] mit*

(i) *$\mathscr{H}$ ist Halbgruppe,*

(ii) *Für $f \in \mathscr{H}$ ist f schwach stetige affine Isometrie.*

$\bigcap_{f\in\mathscr{H}} \operatorname{Fix}(f) \neq \phi$.

Beweis. Unmittelbare Folge aus dem Fixpunktsatz von Ryll–Nardzewski [1, 25].

Satz 5 (Fixpunktsatz für Halbgruppen von Isometrien). *$(E, \|\ \|)$ striktkonvexer, reflexiver Banach-Raum, $\phi \neq X \subset E$ abgeschlossen, beschränkt, konvex. $I := \{f \mid f\colon X \to X$ Isometrie$\}$. $\bigcap_{f\in I} \operatorname{Fix}(f) \neq \phi$.*

Beweis. O.B.d.A. $0 \in X$. X ist schwach kompakt. Nach Lemma 5 ist jedes $f \in I$ affine Isometrie. Jedem $f \in I$ ordnen wir gemäß Lemma 6 die eindeutig bestimmte affin-isometrische Fortsetzung $H(f)\colon \overline{\operatorname{span}}(X) \to \overline{\operatorname{span}}(X)$ zu. Für $f \in I$ besitzt $H(f)$ die Darstellung

$$H(f)(x) = A(x) + b \qquad \text{mit} \quad A \in L_{\mathbb{R}}(\overline{\operatorname{span}}(X), \overline{\operatorname{span}}(X)),\ b \in \overline{\operatorname{span}}(X);$$

also ist $H(f)$ schwach stetig. Da I Halbgruppe und $f \to H(f)$ Halbgruppen-Homomorphismus ist, ist $\mathscr{H} := \{H(f) \mid f \in I\}$ Halbgruppe von schwach

[8] d.h. für $x, y \in \mathbb{R}$ ist $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$.

[9] Der in [15] angedeutete Beweis ist allerdings nicht richtig.

[10] $A^B := \{f \mid f\colon B \to A\}$. Gemäß dem Original Ryll-Nardzewski genügt es, in Satz 5 E striktkonvex und X schwach kompakt, konvex anzunehmen.

stetigen affinen Isometrien mit $H(f)(X) \subset X$ für $f \in I$. Wegen $H(f) \mid X = f$ und Lemma 7 ist also

$$\bigcap_{f\in I} \mathrm{Fix}(f) = \bigcap_{f\in I} \mathrm{Fix}(H(f)) \neq \phi.$$

Bemerkung 3. (1) Satz 5 ist für beliebige Banach-Räume nicht richtig; zum Beispiel, $(E, \|\ \|) := (c_0, \text{Sup-Norm})$, $X := \{x \mid x \in c_0 \wedge \|x\| \leqslant 1\}$, $f\colon X \to X$, definiert durch

$$f(x)_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ x_{n-1}, & \text{falls } n \geqslant 2. \end{cases}$$

Dann ist f Isometrie jedoch bereits $\mathrm{Fix}(f) = \phi$.

(2) Für beliebige lineare normierte Räume und deren abgeschlossene Einheitsvollkugeln X gilt: Ist $f\colon X \to X$ surjektive Isometrie, so ist $f(0) = 0$.

(3) Satz 5 ergibt

(a) Sätze vom Hahn–Banach-Typ,

(b) Sätze vom Krein–Milman-Typ,

(c) Zentrumsbildungen bei konvexen Mengen,

(d) Anwendungen in der Theorie der symmetrischen Algebren.

3. Approximation von Fixpunkten strikt pseudokontraktiver Abbildungen im Hilbert-Raum durch konvergente Toeplitz-Iterationen

Die Beweise zum Fixpunktsatz für nichtexpansive Abbildungen in gleichmäßig-konvexen Räumen von Browder [4], Göhde [11], Kirk [13] waren zunächst rein existentieller Art. Inzwischen sind eine Reihe von konstruktiven Varianten bekannt geworden [5, 9, 14, 17–20, 27]. Für die umfangreichere Klasse der strikt pseudokontraktiven Abbildungen sind gleichfalls Existenzaussagen seit langem bekannt [5]. Diese wollen wir im folgenden durch zwei Aussagen über Toeplitz-Iterationen [18], die gegen Fixpunkte von strikt pseudokotraktiven Abbildungen im Hilbert-Raum stark bzw. schwach konvergieren. ergänzen.

DEFINITION 4. Es sei $(E, (\ ,\ ))$ ein reeller Hilbert-Raum, $\phi \neq X \subset E$, $k \in [0, 1)$. $f\colon X \to E$ heißt "strikt pseudokontraktiv bez. k," wenn für $x, y \in X$

$$(*) \qquad \|f(x) - f(y)\|^2 \leqslant \|x - y\|^2 + k\,\|(Id - f)x - (Id - f)y\|^2$$

stattfindet [5].

Bemerkung 4. (1) Voraussetzungen wie in Definition 4. Dann ist f Lipschitz-beschränkt. Mit $L := (1 + k)/(1 - k)$ ist nämlich $\| f(x) - f(y) \| \leq L \| x - y \|$ für $x, y \in X$.

(2) "Strikt pseudokontraktiv bez. 0" bedeutet also "f nichtexpansiv."

LEMMA 8 (strikt pseudokontraktiv-nichtexpansiv). *$(E, (\ ,\ ))$ reeller Hilbert-Raum, $\phi \neq X \subset E$ konvex, $k \in [0, 1)$, $f: X \to E$ strikt pseudokontraktiv bez. k, $t \in (0, 1 - k]$, $f_t := tf + (1 - t)\, Id$. f ist nichtexpansiv.*

Beweis. [5].

LEMMA 9 (Existenz von Fixpunkten bei nichtexpansiven Abbildungen). *$(E, (\ ,\ ))$ reeller Hilbert-Raum, $\phi \neq X \subset E$ abgeschlossen, beschränkt, konvex, $f: X \to X$ nichtexpansiv.* $\mathrm{Fix}(f) = \phi$.

Beweis. [5, 19, 20].

LEMMA 10 (Existenz von Fixpunkten bei strikt pseudokontraktiven Abbildungen). *$(E, (\ ,\ ))$ reeller Hilbert-Raum, $\phi \neq X \subset E$ abgeschlossen, beschränkt, konvex, $k \in [0, 1)$, $f: X \to X$ strikt pseudokontraktiv bez. k.* $\mathrm{Fix}(f) \neq \phi$.

Beweis. Für $t := 1 - k$ ist $f_t := tf + (1 - t)\, Id$ nichtexpansiv nach Lemma 8. Wegen $f_t: X \to X$ und Lemma 9 ist $\mathrm{Fix}(f_t) \neq \phi$. Wegen $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(f_t)$ ist $\mathrm{Fix}(f) \neq \phi$.

LEMMA 11. *$(E, (\ ,\ ))$ linearer normierter Raum, $\phi \neq X \subset E$, $k \in [0, 1)$. $f: X \to X$ strikt pseudokontraktiv bez. k.*

(E_1) *Für $A \subset X$, A abgeschlossen und beschränkt gilt: Ist $f(x) \neq x$ für $x \in A$, so ist* $\inf_{x \in A} \| f(x) - x \| > 0$.

(E_2) *Für $B \subset X$, B abgeschlossen und beschränkt, ist $(Id - f)(B)$ abgeschlossen.*

(E_3) *Es gibt $m \in \mathbb{Z}^+$ mit f^m kompakt.*

(i) (E_2) $\Rightarrow$ (E_1) *und* (ii) (E_3) $\Rightarrow$ (E_1).

Beweis. (i) Ist $f(x) \neq x$ für $x \in A$, aber $\inf_{x \in A} \| f(x) - x \| = 0$, so gibt es $\{x_n\} \in A^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \to \infty} \|(Id - f)(x_n)\| = 0$, also $0 \in \overline{(Id - f)(A)}$, mithin $0 \in (Id - f)(A)$, Widerspruch.

(ii) Sei $f(x) \neq x$ und $\inf_{x \in A} \| f(x) - x \| = 0$. Dann gibt es $\{x_n\} \in A^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} \{f(x_n) - x_n\} = 0$. Sei $m \in \mathbb{Z}^+$ und f^m kompakt. Dann ist für $n \in \mathbb{N}$

$$\| f^m(x_n) - x_n \| \leqslant \sum_{\nu=0}^{m-1} \| f^{m-\nu-1}(f(x_n)) - f^{m-\nu-1}(x_n)\|$$

$$\leqslant \left(\sum_{\nu=0}^{m-1} L^{m-\nu-1} \right) \| f(x_n) - x_n \|$$

(Nach Bemerkung 4 und 1) ist f Lipschitz-beschränkt), also auch $\lim_{n\to\infty} \{f^m(x_n) - x_n\} = 0$. Wegen $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt und f^m kompakt o.B.d.A. $\{f^m(x_n)\}$ konvergent. Sei $z \in E$ und $\lim_{n\to\infty} \{f^m(x_n)\} = z$, dann folgt $\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = z$, also $z \in A$. Mit

$$\lim_{n\to\infty} \{f(x_n)\} = f(z) \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \{f(x_n) - x_n\} = 0$$

folgt $f(z) = z$, Widerspruch.

LEMMA 12 (Approximation von Fixpunkten nichtexpansiver Abbildungen durch schwach konvergente Toeplitz-Iterationen). *$(E, (\ ,\ ))$ reeller Hilbert-Raum, $X \subset E$ abgeschlossen, beschränkt, konvex, $x_0 \in X$, $f\colon X \to X$ nichtexpansiv mit*

(*) *Für $A \subset X$, A abgeschlossen und $f(x) \neq x$ für $x \in A$ ist*

$$\inf_{x \in A} \| f(x) - x \| > 0;$$

$\{d_n\} \in (0, 1)^{\mathbb{Z}^+}$, $\{d_n\}$ monoton fallend, $\sum d_n$ divergent,

$$x_{n+1} := d_n f(x_n) + (1 - d_n)\, x_n \quad (n \in \mathbb{Z}^+) \qquad (\textit{Toeplitz-Iteration}).$$

Es gibt $z \in \mathrm{Fix}(f)$ mit $\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = z$ (stark).

Beweis. [17, 18, 20].

SATZ 6 (Approximation von Fixpunkten strikt pseudokontraktiver Abbildungen durch stark konvergente Toeplitz-Iterationen). *$(E, (\ ,\ ))$ reeller Hilbert-Raum, $X \subset E$ abgeschlossen, beschränkt, konvex, $x_0 \in X$, $k \in [0, 1)$, $f\colon X \to X$ strikt pseudokontraktiv bez. k mit*

(E_1) *Für $A \subset X$, A abgeschlossen und $f(x) \neq x$ für $x \in A$ ist*

$$\inf_{x \in A} \| f(x) - x \| > 0;$$

$\{c_n\} \in (0, 1-k)^{\mathbb{Z}^+}$, $\{c_n\}$ *monoton fallend*, $\sum c_n$ *divergent*,

$$x_{n+1} := c_n f(x_n) + (1 - c_n) x_n \qquad (n \in \mathbb{Z}^+).$$

$\{x_n\}$ *konvergiert stark gegen einen Fixpunkt von* f.

Beweis. Sei $t := (1-k)/2$. Nach Lemma 8 ist dann $f_t: X \to X$ nichtexpansiv. Wegen $x_{n+1} = c_n f(x_n) + (1 - c_n) x_n$ und $f_t(x_n) = tf(x_n) + (1-t) x_n$ ist $x_{n+1} = (c_n/t) f_t(x_n) + (1 - (c_n/t)) x_n$. Mit $d_n := (c_n/t)$ erfüllt $\{d_n\}$ sämtliche in Lemma 12 an $\{d_n\}$ gestellten Voraussetzungen. Wegen $\|f_t(x) - x\| = t\|f(x) - x\|$ für $x \in A$ folgt (*) von Lemma 12 aus (E_1). Nach Lemma 12 gibt es $z \in \mathrm{Fix}(f_t)$ mit $\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = z$ (stark). Mit $\mathrm{Fix}(f_t) = \mathrm{Fix}(f)$ folgt die Behauptung.

Bemerkung 5. (1) Nach Lemma 11 und Satz 6 gilt die dort genannte Konvergenzaussage insbesondere für die in der Literatur häufig genannten Eigenschaften (E_2) und (E_3).

(2) Der Spezialfall $c_n = 1/(n+1)$ (Cesàro-Iteration) (für $n \geq n_0$ ist $c_n \in (0, 1-k)$) und (E_3) mit $m = 0$ (d.h. X ist kompakt) ergibt ein Ergebnis von Johnson [12].

(3) Der Spezialfall $c_n = \alpha < 1 - k$ und (E_3) mit $m = 1$ erweitert Resultate von Krasnoselski [14] und Schaefer [27] bez. kompakter nichtexpansiver Abbildungen auf strikt pseudokontraktive Abbildungen (im Hilbert-Raum).

LEMMA 13 (Approximation von Fixpunkten nichtexpansiver Abbildungen durch schwach konvergente Toeplitz-Iterationen). *(E, (,)) reeller Hilbert-Raum, $X \subset E$ abgeschlossen, beschränkt, konvex, $x_0 \in X$, $f: X \to X$ nichtexpansiv, $\{d_n\} \in (0, 1)^{\mathbb{Z}^+}$ monoton fallend, $\{d_n\}$ divergent,*

$$x_{n+1} := d_n f(x_n) + (1 - d_n) x_n \qquad (n \in \mathbb{Z}^+).$$

Es gibt $z \in \mathrm{Fix}(f)$ mit $\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = z$ (schwach).

Beweis. [17].

SATZ 7 (Approximation von Fixpunkten strikt pseudokontraktiver Abbildungen durch schwach konvergente Toeplitz-Iterationen). *(E, (,)) reeller Hilbert-Raum, $X \subset E$ abgeschlossen, beschränkt, konvex, $x_0 \in X$, $k \in [0, 1)$, $f: X \to X$ strikt pseudokontraktiv bez. k; $\{c_n\} \in (0, 1-k)^{\mathbb{Z}^+}$, $\{c_n\}$ monoton fallend, $\sum c_n$ divergent. $\{x_n\}$ konvergiert schwach gegen einen Fixpunkt von f.*

Beweis. Mit $t := (1-k)/2$, $d_n := c_n/t$, $f_t := tf + (1-t)\,Id$ und $x_{n+1} = d_n f_t(x_n) + (1 - d_n) x_n$ sind nach Lemma 8 sämtliche Voraussetzungen von

Lemma 13 für f_t erfüllt. Also gibt es $z \in \mathrm{Fix}(f_t)$ mit $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = z$ (schwach). Mit $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(f_t)$ folgt die Behauptung.

Bemerkung 6. (1) Die Konvergenzaussage in Satz 7 gilt insbesondere dann, falls zusätzlich $\lim_{n\to\infty}\{c_n\} = 0$ (für $n \geq n_0$ ist dann $c_n \in (0, 1-k)$); zum Beispiel, $c_n := 1/(n+1)$ (Cesàro-Iteration).

(2) Der Spezialfall $c_n := \alpha < 1 - k$ erweitert Aussagen von Schaefer [27] und Reinermann [17] auf strikt pseudokontraktive Abbildungen.

Bemerkung 7. (1) Natürlich sind auch anderweitig Fixpunktsätze für Abbildungen f mit nicht notwendig konvexem Definitionsbereich X angegeben worden (Leray–Schauder- und Nachfolgetheorien, man vergl. hierzu [31]).

(2) Ist $(E, \|\ \|)$ ein Banach-Raum und X eine nichtleere, echte, abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E,[11] so ergibt eine spezielle Fortsetzungsmethode–deren Realisierbarkeit oft durch Sätze sichergestellt ist–Fixpunktaussagen für Abbildungen f: $\mathrm{Rd}(X) \to \mathrm{Rd}(X)$.

BEISPIELE:

(a) SATZ 8 (Fixpunktsatz für kompakte Abbildungen). *$(E, \|\ \|)$ Banach-Raum, $\phi \neq X \subset E$ abgeschlossen, konvex, $X \neq E$; r: $X \to \mathrm{Rd}(X)$ (stetige) Retraktion mit:*

(*) *Für beschränktes $B \subset X$ ist $r(B)$ beschränkt;*[12] *f: $\mathrm{Rd}(X) \to \mathrm{Rd}(X)$ kompakt,*[13] *$f(\mathrm{Rd}(X))$ beschränkt.*

$\mathrm{Fix}(f) \neq \phi$.

Beweis. Wir definieren g: $X \to X$ vermöge $g := f \circ r$. Dann ist g kompakt und $g(X)$ beschränkt. Nach Schauder [28] ist $\mathrm{Fix}(g) \neq \varnothing$. Wegen $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(g)$ ist $\mathrm{Fix}(f) \neq \phi$.

(b) SATZ 9 (Fixpunktsatz für Abbildungen mit kompakten Iterierten). *$(E, \|\ \|)$ Banach-Raum, $\phi \neq X \subset E$ abgeschlossen, konvex, $X \neq E$; r: $X \to \mathrm{Rd}(X)$ (stetige) Retraktion mit:*

(*) *Für beschränktes $B \subset X$ ist $r(B)$ beschränkt;*[12] *f: $\mathrm{Rd}(X) \to \mathrm{Rd}(X)$ stetig, $p \in \mathbb{N}$ Primzahl, f^p kompakt, $f^p(\mathrm{Rd}(X))$ beschränkt. Es gibt eine Umgebung V von $\mathrm{Fix}(f^p)$ mit $f \mid V \cap \mathrm{Rd}(X)$ kompakt.*

$\mathrm{Fix}(f) \neq \phi$.

[11] Verallgemeinerungen auf allgemeinere Raumtypen bzw. Mengen X sind möglich, bleiben aber hier ausser Betracht, vgl. [22].

[12] Ein solches r ist z.B. vorhanden, wenn $\dim E = \infty$ und $X := \{x \mid x \in E \wedge \|x\| \leq 1\}$ ist [8], oder-trivialerweise-wenn $\mathring{X} = \phi$ ist.

[13] d.h. f ist stetig und für beschränktes $B \subset X$ ist $\overline{f(B)}$ kompakt.

Beweis. Nach Satz 8 ist $\mathrm{Fix}(f^n) \neq \emptyset$. Definiere $g: X \to X$ durch $g := f \circ r$. Dann ist $g^n = f^n \circ r$, also g^n kompakt und $g^n(X)$ beschränkt. Für $U := r^{-1}(V)$ gilt $U \supset \mathrm{Fix}(g^n)$. Wegen $\mathrm{Fix}(g^n) \subset g^n(X)$ ist $\mathrm{Fix}(g^n)$ kompakt, also gibt es eine abgeschlossene ϵ-Umgebung U_ϵ von $\mathrm{Fix}(g^n)$ mit $U_\epsilon \subset U$. Dann ist $g \mid U_\epsilon \cap X$ kompakt. Nach Anh-Browder-Steinlein [31] ist $\mathrm{Fix}(g) \neq \phi$. Wegen $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(g)$ folgt die Behauptung.

(c) SATZ 10 (Fixpunktsatz für kondensierende Abbildungen). *$(E, \|\ \|)$ Banach-Raum, $\phi \neq X \subset E$ abgeschlossen, beschränkt, konvex; $r: X \to \mathrm{Rd}(X)$ (stetige) Retraktion mit:*

(**) *Für $B \subset X$ ist $\Delta(r(B)) \leq \Delta(B)$; $f: \mathrm{Rd}(X) \to \mathrm{Rd}(X)$ kondensierend.*

$\mathrm{Fix}(f) \neq \phi$.

Beweis. $g := f \circ r$ ist kondensierend. Nach Lemma 4 ist $\mathrm{Fix}(g) \neq \phi$. Mit $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(g)$ folgt die Behauptung.

Anmerkungen zum Satz 10. (1) Eine kondensierende Retraktion r kann es bei beliebigem $(E, \|\ \|)$ für $X := \{x \mid x \in E \wedge \|x\| \leq 1\}$ nicht geben; andernfalls wäre $-r: X \to X$ kondensierend jedoch $\mathrm{Fix}(-r) = \phi$, im Widerspruch zu Lemma 4.

(2) Für welche unendlich-dimensionalen

$$(E, \|\ \|) \quad \text{und} \quad X := \{x \mid x \in E \wedge \|x\| \leq 1\}$$

eine Retraktion mit (**) existiert, scheint nicht bekannt zu sein, jedenfalls weiß man, daß es keine nichtexpansive Retraktion von X auf $\mathrm{Rd}(X)$ gibt. Andererseits ist schon im Falle $(E, \|\ \|) := l_2$ mit $X := \{x \mid x \in E \wedge \|x\| \leq 1\}$ und $h: X \to \mathrm{Rd}(X)$, definiert durch $h(x) := ((1 - \|x\|^2)^{1/2}, x)$, h nicht einmal Lipschitz-beschränkt, jedoch $\Delta(h(B)) = \Delta(B)$ für $B \subset X$.

(3) Ist $(E, \|\ \|) := l_2$ und $X := \{x \mid x \in E \wedge \|x\| \leq 1 \wedge x_1 \geq 0\}$, so ist $r: X \to \mathrm{Rd}(X)$ mit $((1 - \sum_{\nu=2}^{\infty} x_\nu^2)^{1/2}, x_2, x_3, \ldots)$ eine stetige Retraktion mit (**), so daß man mit Satz 10 einen Fixpunktsatz für ein auf der Einheitssphäre S^∞ von l_2 definiertes und dort kondensierendes f erhält, welches S^∞ in die "Halbkugelschale" $\mathrm{Rd}(X) = S^\infty \cap X$ abbildet.

LITERATURVERZEICHNIS

1. E. ASPLUND UND I. NAMIOKA, A geometric proof of Ryll-Nardzewski's fixed point theorem, *Bull. Math. Amer. Soc.* **73** (1967), 443–445.
2. M. S· BRODSKII UND D. P. MILMAN, Über des Zentrum einer konvexen Menge, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* (1948), 837–840.
3. L. E. J. BROUWER, Über die Abbildung von Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.* **71** (1912), 97–115.
4. F. E. BROWDER, Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **54** (1965), 1041–1043.

5. F. E. Browder und W. V. Petryshyn, Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **20** (1967), 197–228.
6. A. B. Brown, Extensions of the Brouwer fixed point theorem, *Amer. Math. Monthly* **69** (1962), 643.
7. P. L. Butzer und U. Westphal, The mean ergodic theorem and saturation, *Indiana Univ. Math. J.* **20** (1971), 1163–1173.
8. J. Dugundji, An extension of Tietze's theorem, *Pacific J. Math.* **1** (1951), 353–367.
9. M. Edelstein, On nonexpansive mappings of Banach spaces, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **60** (1964), 439–447.
10. M. Edelstein und A. C. Thompson, Contractions, isometries and some properties of inner-product spaces, *Indag. Math.* **29** (1967), 326–331.
11. D. Göhde, Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung, *Math. Nachr.* **30** (1965), 251–258.
12. G. G. Johnson, Fixed points by mean value iterations, *Proc. Amer. Math. Soc.* **34** (1972), 193–194.
13. W. A. Kirk, A fixed point theorem for mappings which do not increase distances, *Amer. Math. Monthly* **72** (1965), 1004–1006.
14. M. A. Krasnoselski, Zwei Bemerkungen über die Methode sukzessiver Approximationen, *Uspehi Mat. Nauk.* **10** (1955), 123–127.
15. S. Mazur und S. Ulam, Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels, *C. R. Acad. Sci. Paris* **194** (1932), 946–948.
16. J. Reinermann, Über Fixpunkte kontrahierender Abbildungen in uniformen Räumen und deren Darstellung durch konvergente Iterationsverfahren, *Ber. Ges. Math. Datenver. Bonn* 4 (1968).
17. J. Reinermann, Über Fixpunkte kontrahierender Abbildungen und schwach konvergente Toeplitz–Verfahren, *Arch. Math.* **20** (1969), 59–64.
18. J. Reinermann, Über Toeplitz'sche Iterationsverfahren und einige ihrer Anwendungen in der konstruktiven Fixpunkttheorie, *Studia Math.* **32** (1969), 209–227.
19. J. Reinermann, "Über das Verfahren der sukzessiven Näherung in der Fixpunkttheorie kontrahierender Abbildungen," Habilitationsschrift, Aachen, 1970.
20. J. Reinermann, Approximation von Fixpunkten, *Studia Math.* **39** (1971), 1–15.
21. J. Reinermann, Fixpunktsätze vom Krasnoselski-Typ, *Math. Z.* **119** (1971), 339–344.
22. J. Reinermann, Fortsetzung stetiger Abbildungen in Banach-Räumen und Anwendungen in der Fixpunkttheorie, *Ber. Ges. Math. Datenver. Bonn* **57** (1972), 135–145.
23. J. Reinermann und V. Stallbohm, Einige Bemerkungen zum Satz von Mazur/Ulam, to appear.
24. B. E. Rhoades, Fixed point iterations using infinite matrices, to appear.
25. C. Ryll-Nardzewski, On fixed points of semigroups of endomorphisms of linear spaces, *Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statistics and Probability*, 1967.
26. B. N. Sadovski, A fixed point principle, *Functional Anal. Appl.* **1** (1968), 151–153.
27. H. H. Schaefer, Über die Methode sukzessiver Approximationen, *J.-Ber. Deutsch. Math. Verein.* **59** (1857), 131–140.
28. J. Schauder, Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, *Studia Math.* **2** (1930), 171–180.
29. I. J. Schoenberg, A remark on M.M. Day's characterization of inner-product spaces and a conjecture of L. M. Blumenthal. *Proc. Amer. Math. Soc.* **3** (1952), 961–964.
30. I. J. Schoenberg, On a theorem of Kirszbraun and Valentine, *Amer. Math. Monthly* **60** (1953), 620–622.
31. H. Steinlein, Zur Existenz von Fixpunkten bei Abbildungen mit vollstetigen Iterierten, Dissertation, München, 1970.
32. A. Tychonoff, Ein Fixpunktsatz, *Math. Ann.* **111** (1935), 767–776.